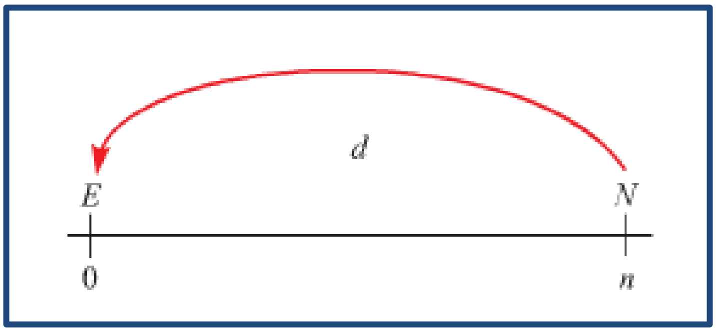
Ud. 6. Descuento compuesto.

6.1 El descuento compuesto

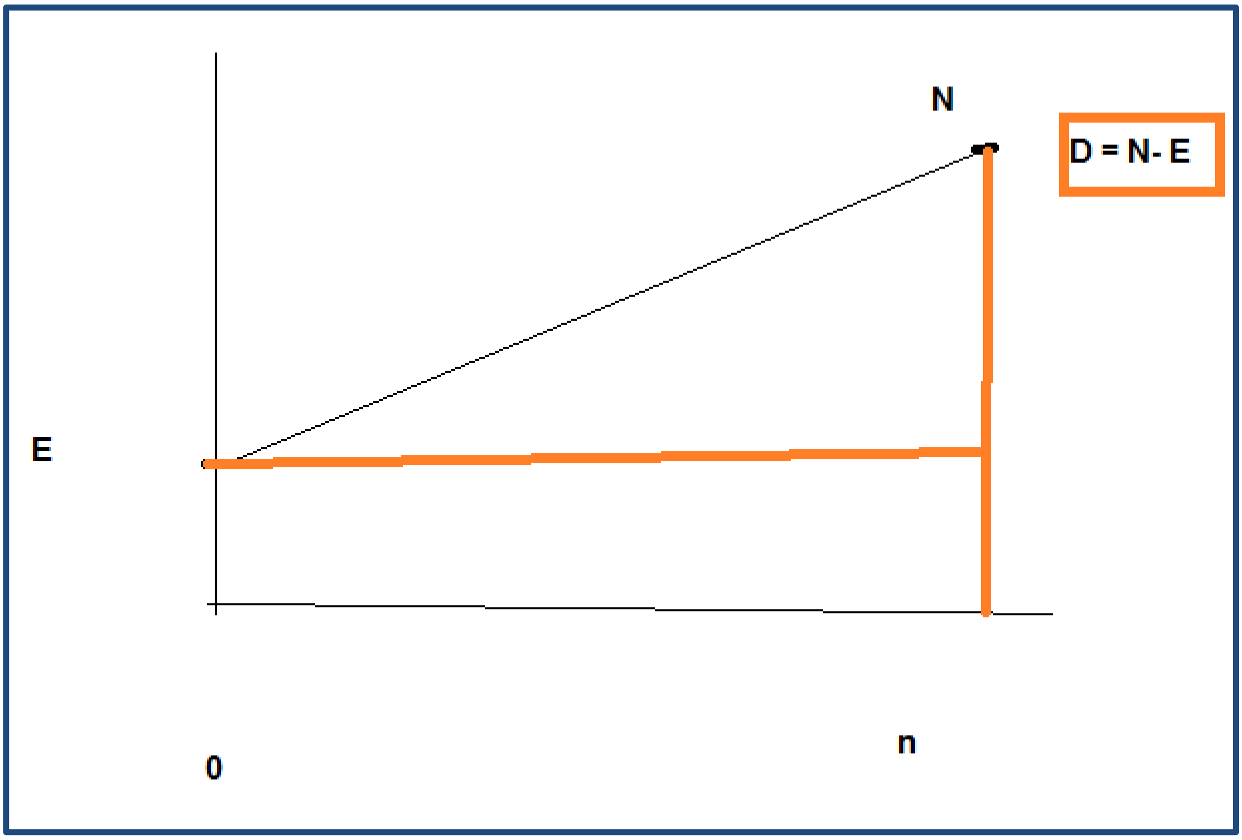
Son **operaciones de descuento** aquellas en las que **conocido un capital que vence en el futuro** tratamos de **calcular** su **capital equivalente en un momento anterior**. A ese **capital futuro** le llamamos **Nominal (N),** y al capital equivalente en el momento anterior efectivo **Efectivo (E)**; **E es menor que N.**



D=N – E

E= N- D

Descuento



Cn = N = Nominal.

Co = E = Efectivo.

D = Descuento

n = tiempo

d = tipo de descuento de la operación expresado en %

Recuerda

Al término $(1 + i)^n$ se le llama **factor de capitalización compuesta** y sirve para trasladar capitales de un momento dado a otro posterior.

El término $(1 + i)^{-n}$ o $\frac{1}{(1 + i)^n}$ se denomina **factor de actualización compuesta** y sirve para trasladar capitales de un momento dado a otro anterior.

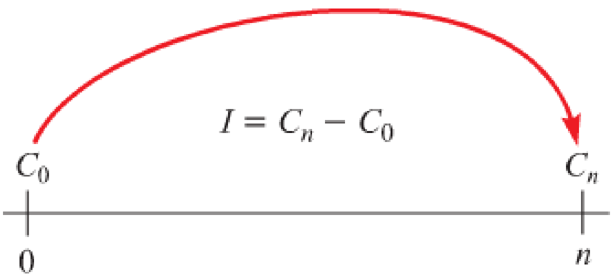
6.2 El descuento compuesto racional

Cuando hablamos de descuento compuesto tenemos que distinguir entre el descuento compuesto racional y el comercial, según cuál sea el capital que se considera en el cómputo de los intereses que se generan en la operación:

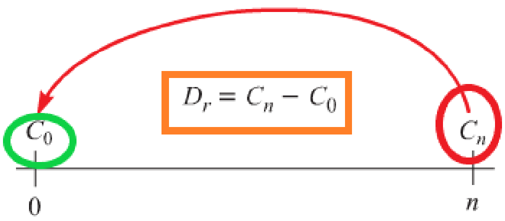
- Descuento **racional** o **matemático:** se calcula sobre el valor efectivo.
- Descuento **comercial:** se calcula sobre el valor nominal.

Definimos el descuento compuesto racional como la operación contraria al interés.

Si sabemos que el capital final es la suma del capital inicial más los intereses y partimos de la fórmula $C_n = C_0 + I$, los intereses generados serán la diferencia entre el capital final o montante y capital inicial, es decir: $I = C_n - C_0$.



Si hemos definido el descuento compuesto racional como la operación contraria al interés, quiere decir que también se puede definir como la diferencia entre el capital final menos el inicial: $D_r = C_n - C_0$



Recuerda

El **capital final** es:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Para calcular el valor efectivo o actualizado en un momento dado, pero anterior a su vencimiento partimos de la expresión $C_n = C_0(1 + d)^n$ y despejamos C_0, obteniendo la siguiente expresión:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + d)^n} = C_n(1 + d)^{-n}$$

Actividad resuelta 6.1

Calcula el valor efectivo y el descuento racional que le han realizado a D. Adrián Cano al entregar en una entidad bancaria un efecto de 4.000 €, con vencimiento dentro de 5 años si le aplicaron un 6 % compuesto anual.

Solución

El valor efectivo que le entregaron fue:

$$C_0 = C_n(1 + d)^{-n} = 4.000\ (1 + 0{,}06)^{-5} = 2.989{,}03\ €$$

El descuento que le practicaron fue:

$$D_r = C_n - C_0 = 4.000 - 2.989{,}03 = 1.010{,}97\ €$$

Actividad resuelta 6.2

Calcula el tanto de descuento que le aplicaron a Dña. Marina Cano al entregar en una entidad bancaria un efecto de 3.000 € nominales, con vencimiento dentro de 2 años, sabiendo que el efectivo resultante fue de 2.850 €.

Solución

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + d)^n} \quad ; \quad 2.850 = \frac{3.000}{(1 + d)^2} \quad ; \quad (1 + d)^2 = \frac{3.000}{2.850}$$

$$(1 + d)^2 = 1{,}052631579 \quad ; \quad (1 + d) = 1{,}052631579^{1/2}$$

$$(1 + d) = 1{,}025978352 \quad ; \quad d = 0{,}02597835209$$

Actividad propuesta 6.1

Calcula el valor efectivo y el descuento racional que le han realizado a D. Raúl Cano al entregar en una entidad bancaria un efecto de 6.000 €, con vencimiento dentro de 3 años, si le aplicaron un 7 % anual.

Recuerda

$$D_r = C_n - C_0$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+d)^n} = C_n(1+d)^{-n}$$

N= 6.000 €

0 — n= 3 años

d= 7% anual

E = $C_0 \rightarrow C_0 = C_n \cdot (1+d)^n$ = 6.000*(1+0,07)$^{-3}$ = **4.897,78 €**

Dr = Cn – Co = 6.000 – 4.897,78 = **1.102,21 €**

Actividad propuesta 6.2

Calcula el tanto de interés que le aplicaron a Dña. Carmen Bravo al entregar en una entidad bancaria un efecto de 8.000 € nominales, con vencimiento dentro de 4 años, sabiendo que el efectivo resultante fue de 7.670 €.

Hay que tener siempre en cuenta que, al igual que ocurría en la capitalización, el tanto y el tiempo deben ser correlativos, es decir, expresarse en la misma unidad temporal. Para ello existe una relación entre el tipo de interés anual y el periódico, de forma que sea d el tipo de negociación compuesta anual y d_k el del periodo. Se dice que son equivalentes cuando se verifica que:

$$1 - d = (1 - d_k)^k$$

de donde obtenemos que

$$d_k = 1 - (1 - d)^{1/k} \quad \text{y} \quad d = 1 - (1 - d_k)^k$$

Igualmente, el tanto nominal de frecuencia k sería J_k, que podemos calcular a partir de la relación:

ATENCIÓN

$$J_k = k \times d_k \quad \text{y} \quad d_k = \frac{J_k}{k}$$

Sin embargo, lo más habitual es operar con los tantos de capitalización, i, i_k y J_k, por lo que las operaciones de tantos equivalentes estudiadas en la Unidad 4 de capitalización compuesta son las que se utilizan en la práctica.

Recuerda

El tanto y el tiempo tienen que ser correlativos.

Actividad resuelta 6.3

¿Cuál será el tanto efectivo anual que le aplicó una entidad financiera a D. Antonio Pérez Bravo si al descontar un efecto de 8.000 €, 20 meses antes de su vencimiento, le descontaron 2.300 €?

Solución

El descuento racional que le practicaron fue:

$$C_n - D_r = C_0 \quad ; \quad 8.000 - 2.300 = 5.700 \text{ €}$$

El tanto mensual al que se realizó la operación fue:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+d)^n} \quad ; \quad 5.700 = \frac{8.000}{(1+d_{12})^{20}} \quad ; \quad (1+d_{12})^{20} = \frac{8.000}{5.700}$$

Recuerda

$$\boxed{1 + i = (1 + i_k)^k}$$

$$\boxed{J_k = i_k \times k}$$

$$(1+d_{12})^{20} = 1{,}403508772 \quad ; \quad (1+d_{12}) = 1{,}403508772^{1/20}$$

$$(1+d_{12}) = 1{,}017093214 \quad ; \quad d_{12} = 0{,}017093214$$

$$1 + d = (1+d_k)^k \quad ; \quad 1 + d = (1 + 0{,}017093214)^{12} \quad ; \quad d = 0{,}2255444872$$

Actividad propuesta 6.3

¿Cuál será el efectivo que le entregaron a D. Manuel Pérez Bravo si al descontar un efecto de 8.000 €, 21 meses antes de su vencimiento, una entidad financiera le aplicó un 5 % nominal capitalizable por trimestres?

Como ya hemos visto el descuento racional es igual al interés. Para obtener su fórmula partimos de la fórmula general de la capitalización compuesta y de ella se despeja el valor del capital inicial, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{D_r = C_n - C_0} \\ \boxed{C_0 = \dfrac{C_n}{(1+i)^n}} \end{array}\right\}$$

En la fórmula del descuento racional ponemos el capital inicial en función del capital final y obtenemos:

$$\boxed{D_r = C_n} - \boxed{\frac{C_n}{(1+i)^n}} = \boxed{C_n\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}$$

luego:

$$\boxed{D_r = C_n[1 - (1+i)^{-n}]}$$

Actividad resuelta 6.4

Don Álvaro Pérez desea anticipar al momento actual el pago de una deuda de 2.400 € que vence dentro de 4 años. ¿Qué cantidad tendrá que entregar si la operación se concierta a un tipo de descuento racional del 5 % anual compuesto? ¿Cuánto se habrá ahorrado con el pago anticipado?

Solución

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \quad ; \quad C_0 = \frac{2.400}{(1+0{,}05)^4} = \frac{2.400}{1{,}21550625} = 1.974{,}49 \text{ €}$$

$$D_r = C_n - C_0 \quad ; \quad D_r = 2.400 - 1.974{,}49 = 425{,}51 \text{ €}$$

También podríamos haber calculado el descuento de la siguiente forma:

$$D_r = C_n[1 - (1+i)^{-n}] \quad ; \quad D_r = 2.400[1 - (1+0{,}05)^{-4}] = 425{,}51 \text{ €}$$

Actividad propuesta 6.4

Don Antonio Pérez Ezcurra debe abonar un efecto comercial de 15.000 € dentro de 5 años. En estos momentos dispone de liquidez, por lo que desea adelantar el pago. ¿Qué cantidad deberá entregar al acreedor si se le aplica un tipo de descuento racional del 8,5 % efectivo compuesto anual?

6.3 El descuento compuesto comercial

Se utiliza en operaciones de descuento a largo plazo y es aquel en el que los intereses que se descuentan se calculan sobre el nominal,

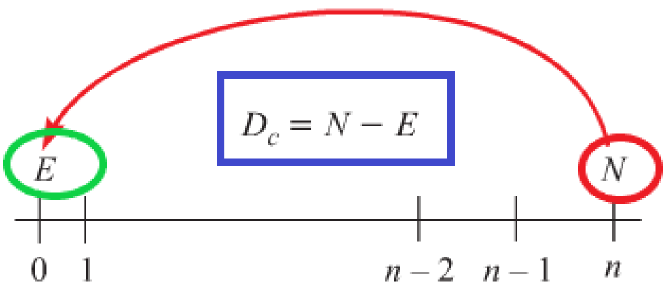
Sabías que...?

En la práctica la mayoría de los efectos comerciales tienen un vencimiento a corto o medio plazo por lo que el descuento comercial que se les aplica es el simple y no el compuesto.

Denominamos:

- N: al nominal del efecto o capital que vence en el momento n.
- d: al tanto unitario de descuento compuesto anual que nos exige la entidad financiera por adelantar el dinero hoy (0).
- n: al tiempo en años que media entre la fecha de negociación y el vencimiento.
- E: al efectivo que produce la negociación.

Podemos representarlo gráficamente del siguiente modo:



$$\boxed{E = N(1 - d)^n}$$

y el descuento comercial compuesto será sustituyendo en su expresión:

$$\boxed{D_c = N - E} = N - \boxed{N(1 - d)^n} = \boxed{N[1 - (1 - d)^n]}$$

$$\boxed{D_c = N[1 - (1 - d)^n]}$$

Actividad resuelta 6.5

Don Sinclert Pérez Castaño desea anticipar al momento actual el pago de un efecto de nominal 6.000 € que vence dentro de 4 años. ¿Qué cantidad deberá entregar para saldar su deuda si se aplica a la operación un descuento comercial del 5 % compuesto anual? ¿Cuánto se habrá ahorrado por anticipar el pago?

Solución

$$E = N(1 - d)^n \quad ; \quad E = 6.000\,(1 - 0{,}05)^4 = 4.887{,}04\ €$$

$$D_c = N - E \quad ; \quad D_c = 6.000 - 4.887{,}04 = 1.112{,}96\ €$$

También podríamos haber calculado el descuento de la siguiente forma:

$$D_c = N[1 - (1 - d)^n] \quad ; \quad D_c = 6.000\,[1 - (1 - 0{,}05)^4] = 1.112{,}96\ €$$

Actividad propuesta 6.5

Calcula la cantidad que tendremos que entregar a un prestamista al que debemos abonar 60.000 € dentro de 3 años, si deseamos adelantar el pago al día de hoy, sabiendo que nos aplicarán un descuento comercial del 10 % compuesto anual. Calcula igualmente el descuento comercial.

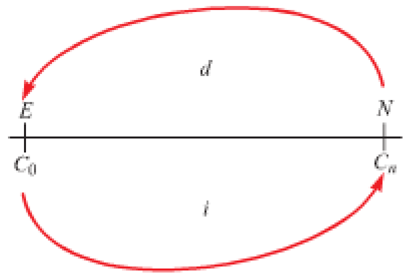
Actividad propuesta 6.6

¿Qué tanto de descuento compuesto te han aplicado en una operación financiera si el nominal del efecto comercial era de 30.000 €, con vencimiento dentro de 4 años y el efectivo abonado ha sido 21.491,79 €?

6.4. Tantos de interés y de descuento equivalentes.

Una vez **visto** el **descuento compuesto racional y el descuento compuesto comercial** **-->** **buscamos la relación entre el descuento compuesto comercial y racional** para que el resultado de la anticipación fuera el mismo cualquiera que sea el modelo de descuento empleado.

Gráficamente se representará:



Y el tanto de descuento comercial d equivalente al tanto i será:

$$\boxed{d = \frac{i}{1+i}}$$

Análogamente, encontraremos un tipo de interés equivalente a un d:

$$\boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$

Actividad resuelta 6.6

Don Raúl Cano tiene una deuda de 4.000 € a pagar dentro de 3 años. En este momento se pregunta qué cantidad tendría que pagar si adelantase su pago al momento actual, si se aplica un descuento compuesto del 5 % compuesto anual:

a) Si se aplica el descuento racional.

b) Si se aplica el descuento comercial.

Solución

a) En el descuento racional.

$$D_r = C_n [1 - (1 + i)^{-n}] \quad ; \quad D_r = 4.000\ [1 - (1 + 0{,}05)^{-3}] = 544{,}65\ €$$

Y el valor de la deuda en el momento actual:

$$C_0 = C_n - D_r \quad ; \quad C_0 = 4.000 - 544{,}65 = 3.455{,}35\ €$$

También podíamos haber calculado directamente el valor actual de la deuda:

También podíamos haber calculado directamente el valor actual de la deuda:

$$C_0 = C_n (1 + i)^{-n} \quad ; \quad C_0 = 4.000\ (1 + 0{,}05)^{-3} = 3.455{,}35\ €$$

b) En el descuento comercial.

$$D_c = N [1 - (1 - d)^n] \quad ; \quad D_c = 4.000\ [1 - (1 - 0{,}05)^3] = 570{,}5\ €$$

Y el valor de la deuda en el momento actual, es decir el efectivo:

$$E = N - D_c \quad ; \quad E = 4.000 - 570{,}5 = 3.429{,}5\ €$$

También podíamos haber calculado directamente el valor actual de la deuda:

$$E = N (1 - d)^n \quad ; \quad E = 4.000\ (1 - 0{,}05)^3 = 3.429{,}5\ €$$

Por tanto, aplicando un tipo de interés y de descuento idénticos los resultados son distintos, siendo mayor el valor actual obtenido en el descuento racional debido a que los intereses se calculan sobre el capital inicial, que es más pequeño.

Para conseguir el mismo resultado habría que calcular el tipo de descuento compuesto equivalente al 5 %, mediante la relación de equivalencia:

$$d = \frac{i}{1+i} \quad ; \quad d = \frac{0{,}05}{1+0{,}05} = 0{,}04761904762$$

Descontando comercialmente al nuevo tipo de descuento, el resultado será:

$$E = 4.000\,(1 - 0{,}04761904762)^3 = 3.455{,}35\ €$$

Como ya hemos visto el descuento racional es igual al interés. Para obtener su fórmula partimos de la fórmula general de la capitalización compuesta y de ella se despeja el valor del capital inicial, luego:

$$\boxed{D_r = C_n - C_0} \qquad \boxed{C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}}$$

En la fórmula del descuento racional ponemos el capital inicial en función del capital final y obtenemos:

$$\boxed{D_r = C_n} - \boxed{\frac{C_n}{(1+i)^n}} = \boxed{C_n\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}$$

luego:

$$\boxed{D_r = C_n[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$\boxed{E = N(1-d)^n}$$

y el descuento comercial compuesto será sustituyendo en su expresión:

$$\boxed{D_c = N - E} = N - \boxed{N(1-d)^n} = \boxed{N[1-(1-d)^n]}$$

$$\boxed{D_c = N[1-(1-d)^n]}$$

Actividad propuesta 6.7

Don Álvaro Pérez desea conocer qué descuento se le aplicará a una letra de 5.000 € que vence dentro de 4 años, si el descuento a interés compuesto es del 8 % anual:

a) Aplicando el descuento racional.

b) Aplicando el descuento comercial.

Actividad propuesta 6.8

A partir de los datos de la Actividad propuesta anterior, don Álvaro Pérez desea conocer también el efectivo, tanto por el descuento comercial como por el racional, así como el tipo de descuento equivalente al 8 % de interés compuesto.